

线性规划课程实验报告

实验名称 运输问题的数学模型及求解方法

班级	数学类 2203	学号	220221100327	姓名	徐梓乔	序号	80
任课教师	刘敬刚	实验地点	数学实验中心	评分			

一、实验目的

- 1、掌握运输问题的数学模型及其基本概念；
- 2、掌握运输问题数学模型的建立方法；
- 3、掌握求解运输问题的表上作业法。

二、实验要求和结果

通过查阅相关文献资料，设计并编写求解产销平衡运输问题的程序，具体要求如下：

- (1) 写出所编程序能够求解的运输问题数学模型；
- (2) 画出流程图或者写出算法描述；
- (3) 给出至少两个具有代表性的计算实例。

结果如下：

- (1) 数学模型：

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

- (2) 算法描述

①累加各地产量和销量，判断总产量和总销量是否相同，若相同，则为产销平衡问题，否则，添加行或列构建虚拟产地或销地，将产销不平衡问题化为产销平衡问题，添加行或列对应运价为 0；

②运用西北角法 (Transport1) 或伏格尔法 (Transport2) 找到初始方案，并添加对偶系数 u_i 和 v_j ，运用位势法计算检验数；

③根据检验数表，判断方案是否为最优方案：若决策变量的检验数均大于 0，则该方案为且为唯一最优运输方案，输出该方案，算法终止；若某一个决策变量的检验数等于 0，则最优运输方案不唯一，且该方案也为最优方案之一，输出该方案，算法终止；在其他情况下，该方案不为最优运输方案，需进行基变量变换，调整运输方案，进入第④步；

④1 确定换入变量：当存在非基变量的检验数 $\sigma_{ij} < 0$ 且 $\sigma_{kl} = \min\{\sigma_{ij}\}$ 时，以下 x_{kl} 为换入变量，找出它在运输表中的闭合回路。2 顶点编号：将空格 (k,l) 编号为数字“1”，沿闭合回路方向前进，对闭合回路上的顶点依次编号。3 确定换出变量：在该闭合回路，从所有偶数编号的调运量中选出取最小值 $\theta = \min x_{ij}$ ，以该最小值对应的变量为换出变量。4 确定新的运

输方案：以换出变量的运输量为调整量 θ ，将该闭回路上所有奇数号格的调运量加上调整量 θ ，所有偶数号格的调运量减去 θ ，其余量不变，这样就得到一个新的调运方案。该运输方案的总费用比原运输方案减少，改变量等于 θ 乘以换入变量的检验数。5 对得到的进行最优性检验，如不是最优解，则重复上述 1-4，直至得到最优运输方案。

(3) 运算实例：

例 1.某运输问题相关信息如下表所示（产销平衡问题）

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	

问：应如何调运可使总运输费用最小？

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 3 & 10 \\ 1 & 9 & 2 & 8 \\ 7 & 4 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

生产= [7 4 9];

销量= [3 6 5 6];

[x,sigma]=Transport2(A,produce,sale)

该问题为产销平衡问题

最优方案不唯一,其中一个为(表中-1 表示空格):

$$x = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

故最优方案不唯一，最小运价为 85.

例 2.某运输问题相关信息如下表所示。

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	0	5	4	3	2500
A_2	2	8	3	4	2500
A_3	1	7	6	2	3000
销量	1500	2000	3000	3500	

求运费最小的运输方案。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

生产=[2500 2500 3000];

销量=[1500 2000 3000 3500];

[x,sigma]=Transport2(A,produce,sale)

该问题产大于销,方案最后 1 列为虚拟销地

(-1 代表空格) 有唯一最优方案,最优方案为:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 2000 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 2500 & 0 \\ 1500 & 0 & 0 & 3500 \end{pmatrix}$$

最小运价为:

故有唯一最优方案, 最小运价为 28000

三、思考题解答

1、写出运输问题的数学模型。

数学模型:

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

2、运输问题有什么特点?

一般运输问题的基本特点:

- (1) 有多个产地和多个销地;
- (2) 每个产地的产量不同, 每个销地的销量也不同;
- (3) 各产销两地之间的运价不同;
- (4) 如何组织调运, 在满足供应和需求的前提下使总运输费用 (或里程、时间等) 最小。

运输问题的数学模型的系数矩阵的基本特点:

- (1) 共有 $m+n$ 行, 分别表示各产地和销地; m, n 列, 分别表示各决策变量;
- (2) 每列只有两个 1, 其余为 0, 分别表示只有一个产地和一个销地被使用;
- (3) 基变量 (系数矩阵的秩) 有 $m+n-1$ 个。

3、简述产销不平衡的运输问题如何转化为产销平衡的运输问题?

①当产大于销时, 只要增加一个假想的销地 $j = n+1$ (实际上是储存), 该销地总需要量为

$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ ，而在单位运价表中令从各产地到假想销地的单位运价为 $c'_{i,n+1} = 0$ ，就可以转化成一个产销平衡的运输问题。

②当销大于产时，可以在产销平衡表中增加一个假想的产地 $i = m+1$ ，该地产量为 $\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ ，在单位运价表上令从该假想产地到各销地的运价 $c'_{m+1,j} = 0$ ，就可以转化成一个产销平衡的运输问题。

4、求解产销平衡运输问题的表上作业法，在哪些计算环节会出现退化基可行解的情形（即出现为零的数字格），并简述如何确定运量为零的数字格？

（1）表格中一般要有 $(m+n-1)$ 个数字格（基变量），但有时在分配运量后，需要同时划去一行和一系列，这时需要补一个 0，以保证有 $(m+n-1)$ 个数字格作为基变量，一般可在划去的行和列的任意空格处填一个 0 即可。

（2）利用换入变量的闭回路对运输方案进行调整时，标有负号的最小运量作为调整量 θ ，当至少两个数字格为最小运量时，选择任意一个最小运量对应的基变量作为换出变量，该方格由数字格变为空格，其他运量等于最小运量的数字格填 0。

5、建立数学模型并求解

人事部门欲安排四人甲、乙、丙、丁到四个不同岗位 A、B、C、D 工作，每个岗位一个人。经考核四人在不同岗位的成绩（百分制）如表所示，如何安排他们的工作使总成绩最好。

工作人员	A	B	C	D
甲	85	92	73	90
乙	95	87	78	95
丙	82	83	79	90
丁	86	90	80	88

解：由题意可得数学模型：

$$\begin{aligned} \min z = & -85x_{11} - 92x_{12} - 73x_{13} - 92x_{14} - 95x_{21} - 87x_{22} \\ & - 78x_{23} - 95x_{24} - 82x_{31} - 83x_{32} - 79x_{33} - 90x_{34} - 86x_{41} \\ & - 90x_{42} - 80x_{43} - 88x_{44} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 (i, j = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -85 & -92 & -73 & -90 \\ -95 & -87 & -78 & -95 \\ -82 & -83 & -79 & -90 \\ -86 & -90 & -80 & -88 \end{pmatrix}$$

生产= [1 1 1 1];

销量= [1 1 1 1];

[x,sigma]=Transport1(A,produce,sale)

该问题为产销平衡问题

(-1 代表空格) 有唯一最优方案,最优方案为:

$$x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

最小运价为: 357

故最优方案为: 将 A 岗位安排给乙, 将 B 岗位安排给甲, 将 C 岗位安排给丁, 将 D 岗位安排给丙, 最大成绩为 357。

四、实验的难点分析

简述实验过程中遇到的困难及解决办法:

1. Transport2 方案中使用的是 Vogel 法, 在编辑代码时, 一开始使用的是嵌套循环来寻找最小行差值和最小列差值, 后查阅资料学习了 *sort* 函数, 然后经过几次的修改和尝试得到了正确的结果。
2. Transport1 中的西北角法一开始不够完善, 导致出现基变量数量不够的情况, 致使导致代码陷入死循环, 后来通过查阅 CSDN 得知可以经过赋值调整来解决

